Respuestas Segundo Parcial MA-1111 (TIPO 1-B).

1. (a) (4 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+x} \ - \ 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+x} \ - \ 2x)(\sqrt{4x^2+x} \ + \ 2x)}{(\sqrt{4x^2+x} \ + \ 2x)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x \ - \ 4x^2}{\sqrt{4x^2+x} \ + \ 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x} \ + \ 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}} \ + \ 2 = \frac{1}{4}$$

(b) (4 puntos)

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\cos(2x-4)}{3\,\mathrm{sen}(2x-4)} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y)}{3\,\mathrm{sen}(y)} = \lim_{y\to 0} \Big(\frac{1-\cos(y)}{y}\Big).\Big(\frac{y}{\mathrm{sen}(y)}\Big).\frac{1}{3} = 0.1.\frac{1}{3} = 0$$

2. (a) (2 puntos)

Dominio$(f) = (-\infty, 3]$, Rango$(f) = [5, \infty)$

(b) (2 puntos)

Si $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 5+\sqrt{6-2x_1} &= 5+\sqrt{6-2x_2} \\ \sqrt{6-2x_1} &= \sqrt{6-2x_2} \\ 6-2x_1 &= 6-2x_2 \\ -2x_1 &= -2x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

O explicar que cualquier recta horizontal que corta a $y = f(x)$ lo hace en un único punto.

(c) (3 puntos)

$$\begin{aligned} y &= 5+\sqrt{6-2x} \\ y-5 &= \sqrt{6-2x} \\ (y-5)^2 &= 6-2x \\ (y-5)^2-6 &= -2x \\ \frac{6-(y-5)^2}{2} &= x \end{aligned}$$

Entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{6-(x-5)^2}{2}$ y Dominio$(f^{-1}) =$ Rango$(f) = [5, \infty)$

3. (7 puntos)

   $f(0) = 4$

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}\right).\frac{b}{2} = 1.\frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x + 3a = 3a$$

   Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$

   $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

   Entonces $4 = \frac{b}{2} = 3a$. Por lo tanto, $a = \frac{4}{3}$ y $b = 8$

4. (7 puntos)

   Asíntotas Verticales:

   $x = 2$ es una asíntota vertical pues:

   $$\lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)(x+3)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x+3)}{(x-2)} = -\infty.$$

   $$\lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(x+3)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x+3)}{(x-2)} = \infty.$$

   Asíntotas Horizontales:

   $$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to \infty} \frac{-1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = -1$$

   $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = -1$$

   Entonces $y = -1$ es asíntota horizontal a derecha y a izquierda.

   Asíntotas Oblicuas: No tiene.

5. (4 puntos)

   (a) Sea f una función continua en $[a, b]$. Si M es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

   $$f(c) = M$$

(b) Considero la función $f(x) = x^4 - 3\sqrt[3]{x} - 2$ en el intervalo $[0, 8]$.

i. $f(x)$ es continua en $[0, 8]$ pues es suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

ii. $-1 = f(0) < 0 < f(8) = 4.088$

Por el Teorema del Valor Intermedio existe un $c \in (0, 8)$ tal que:

$$f(c) = 0$$

Como $f(c) = c^4 - 2\sqrt[3]{c} - 1$, se tiene que $c^4 - 2\sqrt[3]{c} = 1$ y por lo tanto c es solución de la ecuación dada.